II Combinatoire

1°) Ordre sans répétition

Nombre de permutations

Définition

Etant donné n éléments d'un ensemble fini E, le nombre de façons de les ranger de toutes les manières possibles ou le nombre de permutation des n éléments de E, est le produit de tous les entiers de 1 à n c'est – à – dire

$$n\,! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 \text{ (on lit « factorielle n »)}$$

Par convention $0\,! = 1 = 1\,!$

Exemple : combien y a-t-il d'anagrammes des mots suivants :

1. Toi
2. Crayon
3. classe
4. baobab

1. 3x2x1=6 5anna 2. 6x5x4x3x2x1=720 719 anna 3. 720/2=360 359 anna 4. 720/6x2 = 60 59 anna

Nombre d'arrangements

On considère un ensemble E contenant n éléments et soit p un entier inférieur ou égal à n

Définition

Etant donné n objets le nombre de façons de ranger p de ces objets $p \leq n$ de toutes les manières possibles est

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

Exemple :

A partir du mot clavier, combien peut – on faire de mots :

1. de deux lettres 2. de 4 lettres 3. de 7 lettres ?

1. 7x6 2. 7x6x5x4 3. 7 !

2°) « Désordre » sans répétition : Combinaisons

Théorème et définition

Soit E un ensemble contenant n éléments et **p entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.**

Une combinaison de p éléments choisis parmi n est une partie de E contenant p éléments pris parmi les n éléments de E. Le nombre de parties à p éléments de E ou le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n se note $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ ou C_n^p, on lit « p parmi n » :

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{\mathbf{p} \times (p-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n\,!}{\mathbf{p\,!\,(n-p)\,!}}$$

Preuve : p 262

Exemples :

1. Un damier contient 16 cases. Combien y a-t-il de façon de placer 3 jetons sur ces cases à raison d'un seul jeton par case ?
2. On marque 16 points dans un plan de telle sorte que trois qcq ne soient pas alignés : combien peut –on former de triangles ayant leurs sommets parmi ces points ?
3. Une urne contient 10 boules blanches et 15 rouges. On choisit simultanément quatre boules de l'urne.
    a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
    b. Combien de tirages comportent deux blanches et deux rouges.

1. Placer trois jetons sur trois cases c'est comme choisir trois cases parmi 16 soit choisir une partie à 3 éléments dans un ensemble de 16 éléments

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{\mathbf{3 \times 2 \times 1}} = \mathbf{560}$$

2. C'est exactement le même raisonnement que ci- dessus donc 560 triangles.

3. a.

$$\binom{25}{4} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22}{\mathbf{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \mathbf{12560}$$

b. On choisit 2 boules blanches parmi 10 donc

$$\binom{10}{2} = 45$$

On choisit 2 boules rouges parmi 15 donc

$$\binom{15}{2} = 105$$

Le nombre total de choix est donc 45x105 = 4725 puisqu' à chaque choix de boule blanche on peut associer l'un des 105 choix de boules rouges et ceci 45 fois.

Propriétés

n et p sont des entiers naturels avec $p \leq n - 1$ et $n \geq 1$

1.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

2.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

3.

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

4.

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Preuves : 1. L'ensemble E ne comporte qu'une partie « vide » et une seule partie ayant n éléments, c'est – à – dire l'ensemble E lui – même, d'où le résultat.
2.Si une partie A de E possède p éléments , la partie complémentaire de A dans E ou $\bar{A}$ en possède n – p , il ya donc autant de parties à p éléments que de parties à n – p éléments.
3. Conséquence du 2 avec p = 1 et il y a n parties ayant 1 éléments.
4. Algébriquement :

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \binom{n}{p}$$

Après réduction au même dénominateur.
Avec les parties :
E est un ensemble à n éléments et soit *x* un élément de E.
E contient donc n – 1 éléments autres que *x*.
Soit A une partie de E ayant p éléments. Deux cas se présentent :
Si *x* est dans A alors les p – 1 éléments de A sont choisis parmi les n – 1 éléments de E
Si *x* n'est pas dans A alors les p éléments de A sont choisis parmi les n – 1 éléments de E.
Or le nombre de parties de E à p éléments contenant *x* ajouté au nombre de parties de E à p éléments ne contenant pas *x* donne le nombre de parties de E à p éléments.

Exercice

Une urne contient 4 boules : 2 boules rouges et deux boules blanches. On tire simultanément 2 boules. Combien de tirages contiennent p boules rouges, p variant de 0 à 2 puis en déduire que

$$\binom{4}{2} = \sum_{p=0}^{2} \binom{2}{p}^2$$

0R 2 B	1R1B	2R0B
$\binom{2}{0} \times \binom{2}{2} = \binom{2}{0}^2$	$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = \binom{2}{1}^2$	$\binom{2}{2} \times \binom{2}{0} = \binom{2}{2}^2$

Formule de Pascal et formule du binôme de Newton

Théorème

Soit a et b deux nombres réels (ou complexes) et un entier naturel non nul. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Preuve : démonstration par récurrence à savoir p 263

Exemples :

1. Calculer $(a+b)^6$
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p}$ puis $S = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{p}$

1. $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

2. $(1+1)^n = N = 2^n$. $f(x) = (1+x)^n$ donc $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ mais aussi

$f'(x) = \binom{n}{1} + 2x\binom{n}{2} + \dots + nx^{n-1}\binom{n}{n}$ d'où $S = f'(1) = n2^{n-1}$.