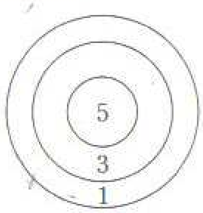
EXERCICES CORRIGES SUR LES PROBABILITES

Variables aléatoires

Ex 1

Un cible circulaire est composée de 3 zones concentriques rapportant 5, 3 et 1 points respectivement. Les probabilités d'atteindre ces 3 zones sont dans l'ordre $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.



On admet que les résultats de 2 tirs successifs sont indépendants. On tire deux fois. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des points obtenus.

1. Définir la loi de probabilité de X. (On peut utiliser un tableau à double entrée.)

2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Probabilités conditionnelles

Ex 2

Dans la production journalière d'une usine, la probabilité pour qu'une pièce soit bonne à la sortie de l'atelier est de 0,9. Avant la livraison, on effectue un contrôle rapide :

– si la pièce est bonne, elle est acceptée ;

– si la pièce est mauvaise, elle peut néanmoins être acceptée avec une probabilité de 0,03.

1. Calculer la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit acceptée au contrôle.

2. Calculer la probabilité à 10^{-3} près pour qu'une pièce acceptée au contrôle soit bonne.

Ex 3

Une pisciculture dispose de 2 bassins B_1 et B_2 :

B_1 contient 7 truites et 3 carpes,

B_2 contient 5 truites et 2 carpes.

On choisit un des 2 bassins au hasard et on en extrait un poisson au hasard.

1. Calculer la probabilité :

– pour que ce soit une truite et qu'elle provienne de B_1 ;

– pour que ce soit une truite et qu'elle provienne de B_2.

2. En déduire que la probabilité d'extraire une truite est $\frac{99}{140}$.

3. On a extrait une truite. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de B_1 ?

CORRIGES

Ex 1

1. La somme des points obtenus est donnée par le tableau :

	1	3	5
1	2	4	6
3	4	6	8
5	6	8	10

X peut donc prendre les valeurs 2, 4, 6, 8, 10.
Il y a 9 résultats possibles.
Grâce au tableau on peut donner la loi de probabilité de X.

x_i	2	4	6	8	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2.

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{2}{9} + 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{2}{9} + 10 \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{54}{9}$$

$$E(X) = 6.$$

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{9} + 4^2 \times \frac{2}{9} + 6^2 \times \frac{1}{3} + 8^2 \times \frac{2}{9}$$

$$+ 10^2 \times \frac{1}{9} = \frac{372}{9} = \frac{124}{3}$$

$$[E(X^2)] = 36$$

donc $V(X) = \frac{16}{3}$.

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{16}{3}}$ soit $\sigma(X) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \simeq 2,3.$

Ex 2

Soit A l'événement « la pièce est acceptée »
et B l'événement « la pièce est bonne ».

Les données se traduisent par :

$p(B) = 0{,}9$, donc $p(\overline{B}) = 0{,}1$

$p(A|B) = 1$ et $p(A|\overline{B}) = 0{,}03$.

◆ **1.** B et $\overline{B}$ forment une partition de l'ensemble des pièces fabriquées car $B \cup \overline{B} = E$ et $B \cap \overline{B} = \varnothing$

donc $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

$A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles

donc $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$.

Or, $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, donc $p(A \cap B) = p(A|B) \times p(B)$,

donc $p(A \cap B) = 1 \times 0{,}9 = 0{,}9$

et $p(A|\overline{B}) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})}$, donc $p(A \cap \overline{B}) = p(A|\overline{B}) \times p(\overline{B})$

donc $p(A \cap \overline{B}) = 0{,}03 \times 0{,}1 = 0{,}003$

donc $p(A) = 0{,}9 + 0{,}003$

soit $\mathbf{p(A) = 0{,}903.}$

◆ **2.** La probabilité pour qu'une pièce acceptée au contrôle soit bonne est $p(B|A)$ c'est-à-dire la probabilité pour que la pièce soit bonne sachant qu'elle a été acceptée au contrôle

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}9}{0{,}903} = \frac{900}{903}$$

$\mathbf{p(B|A) = 0{,}997}$ **(à 10^{-3} près)** (ou 0,996).

Ex 3

1. Soit T l'événement « on a extrait une truite » ;
B_1 l'événement « on a extrait un poisson de B_1 » ;
B_2 l'événement « on a extrait un poisson de B_2 ».

a) L'événement « il s'agit d'une truite et elle provient de B_1 » est l'événement $T \cap B_1$.
Or, la probabilité pour qu'il s'agisse d'une truite, sachant qu'elle provient de B_1 est $\frac{7}{10}$

donc $p(T|B_1) = \frac{7}{10}$.

Or, $p(T|B_1) = \frac{p(T \cap B_1)}{p(B_1)}$, donc $\frac{7}{10} = \frac{p(T \cap B_1)}{p(B_1)}$.

$p(B_1) = \frac{1}{2}$ donc $\boldsymbol{p(T \cap B_1) = \frac{7}{20}}$.

b) On fait de même pour $T \cap B_2$.

$p(T \cap B_2) = p(T|B_2) \times p(B_2) = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

donc $\boldsymbol{p(T \cap B_2) = \frac{5}{14}}$.

2. L'événement T est la réunion des 2 événements incompatibles : $T \cap B_1$ et $T \cap B_2$

donc $p(T) = p(T \cap B_1) + p(T \cap B_2) = \frac{7}{20} + \frac{5}{14} = \frac{49 + 50}{140}$

donc $\boldsymbol{p(T) = \frac{99}{140}}$.

3. La probabilité pour que la truite extraite provienne de B_1 est $p(B_1|T)$.

Or, $p(B_1|T) = \frac{p(B_1 \cap T)}{p(T)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{99}{140}} = \frac{7}{20} \times \frac{140}{99} = \frac{49}{99}$

donc $\boldsymbol{p(B_1|T) = \frac{49}{99}}$.