CORRECTION DES EXOS P 3 DU COURS SUR LES LIMITES

1. $U_n > 1$ donc la suite diverge vers $+\infty$.

2. On utilise le théorème des gendarmes en remarquant que comme $n \geq 1$

Alors pout tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$ on a donc

$$n^2 + 1 \leq n^2 + p \leq n^2 + n$$

soit en passant à **<u>l'inverse</u>** :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2 + n}} \leq \frac{1}{n^2 + p} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2 + 1}}$$

puis en multipliant par n (qui est positif donc pas de problème)

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + p} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

On effectue enfin la somme quand p varie de 1 à n on obtient

$$\underbrace{\frac{n}{n^2 + n} + \frac{n}{n^2 + n} + \ldots + \frac{n}{n^2 + n}}_{\text{on additionne n fois la même quantité}} \leq \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + n} \leq \underbrace{\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 1} + \ldots + \frac{n}{n^2 + 1}}_{\text{on additionne n fois la même quantité}}$$

C'est aussi

$$\sum_{P=1}^{n} \frac{n}{n^2 + n}$$

Les termes de la somme ne dépendent pas de p !

C'est aussi

$$\sum_{P=1}^{n} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Les termes de la somme ne dépendent pas de p !

$$n \text{ x } \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2 + p} \leq n \text{ x } \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2 + p} \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

Puis en passant à la limite comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2 + n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2 + 1} = 1$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1$

3. 1°) $f(x_0) = x_0$: $x_0 = 0.5$ car $x_0 \geq 0$.

2°) On admettra que $| U_{n+1} - x_0 | \leq 18/25\, | U_n - x_0 |$ donc

$$\left\{\begin{array}{l}
| U_n - x_0 | \leq 18/25\, | \cancel{U_{n-1} - x_0} | \\
| \cancel{U_{n-1} - x_0} | \leq 18/25\, | \cancel{U_{n-2} - x_0} | \\
\quad\ldots\ldots.. \\
| \cancel{U_2 - x_0} | \leq 18/25\, | \cancel{U_1 - x_0} | \\
| \cancel{U_1 - x_0} | \leq 18/25\, | U_0 - x_0 |
\end{array}\right.$$

On multiplie n fois

Puis en multipliant membres à membres
Avec la simplification de certains termes on obtient :

$$| U_n - x_0 | \leq (18/25)^n\, | U_0 - x_0 |$$

3°) On applique la conséquence du th des gendarmes et $\lim (18/25)^n = 0$ car $18/25 < 1$ et
$\lim U_n = 0.5$

4. On utilise la méthode de l'expression conjuguée .

$$U_n = \sqrt{(n+1)} - \sqrt{n} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}}$$

$\lim U_n = 0$