

CONTROLE DE MATHEMATIQUES. BTS1. le 06/10/08. Durée : 2 H

Exercice 1(9 points)

Première partie

On désigne par G et P les polynômes définis sur R par $G(x) = 2x^2 - 5x + 3$ et $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

- 1°) Résoudre l'inéquation $G(x) > 0$.
- 2°) a) Calculer $P(3)$ et en déduire une factorisation de $P(x)$.
- b) Résoudre $P(x) = 0$.

Deuxième partie

- 1°) Montrer que $\ln(x-1)$ est défini sur l'intervalle $E =]1 ; +\infty[$.
- 2°) Résoudre dans E les équations suivantes :
- a) $\ln(x-1) = \ln 3$ b) $\ln(x-1) = 3$
- 3°) a) Montrer que l'équation $\ln(x-1) + \ln(2x-1) = \ln(2x-2)$ est aussi définie sur E.
- b) Résoudre alors dans E cette équation.

Exercice 2 (11 points)

Première partie

- 1°) Résoudre dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $\ln x \geq 0$.
- 2°) En déduire le signe de $\ln x$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$.

- 1°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- b) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat
- (On pourra remarquer que $f(x) = 1 + \frac{1}{x} (1 + \ln x)$)
- 2°) a) Soit f' la dérivée de f. Calculer f'(x).
- b) Dresser le tableau de variation de f où figurera le signe de f'(x).
- 3°) a) Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $]0 ; +\infty[$.
- b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$; En déduire la position relative de la courbe C de f par rapport à la droite D d'équation $y = 1$.