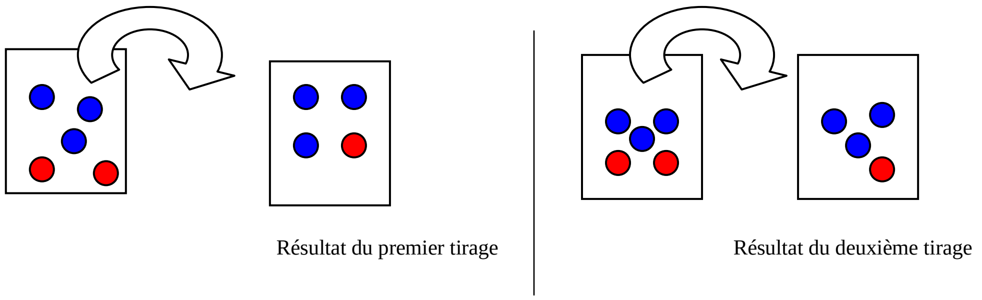
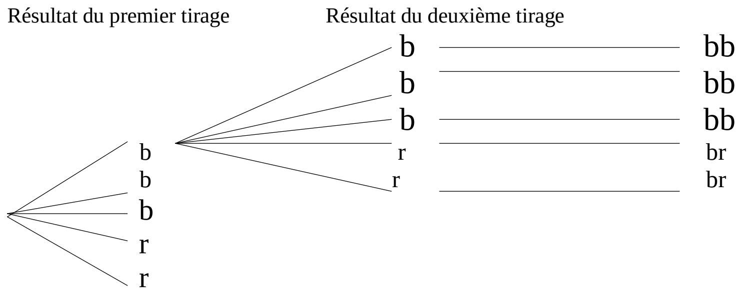
PROBABILITES

I – PROBABILITES CONDITIONNELLES.

1°) -Evénements indépendants

Exemple : Dans un sac on a 2 boules rouges et 3 boules bleues indiscernables au toucher
On prélève au hasard une boule dont on note la couleur et on la remet dans le sac. On recommence en prenant une deuxième boule. Un résultat est un couple (première boule tirée, deuxième boule tirée).
On suppose que tous les couples possibles sont équiprobables.
1°) A l'aide d'un arbre dénombrer tous les résultats possibles.
2°) Déterminer la probabilité de l'événement A : « on a une boule bleue au premier tirage » et de l'événement B : « on a une boule bleue au deuxième tirage » puis P(A∩B).





25 résultats possibles (5 x 5)

P(A) = **15/25 = 3/5** **P(B) = 15/25 = 3/5** **P(A ∩ B) = 9/25 = P(A) x P(B)**
Ici la réalisation de A n'influence pas la réalisation de B

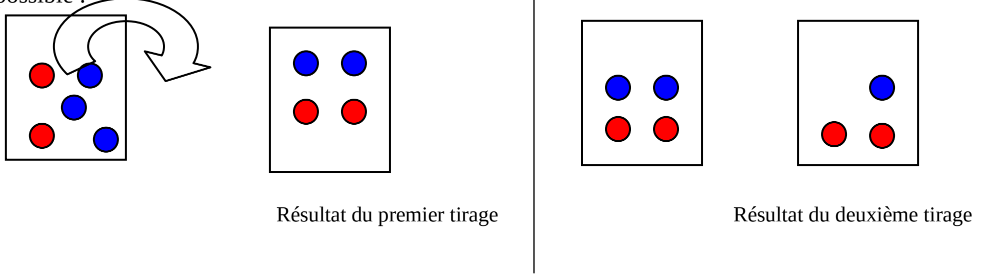
Définition

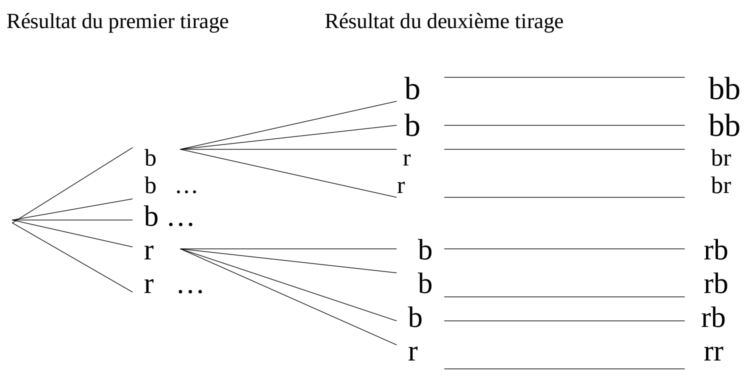
Deux événements A et B sont dits INDEPENDANTS lorsque P(A ∩ B) = P(A) x P(B)

2°) Conditionnement

Dans un sac on a 2 boules rouges et 3 boules bleues indiscernables au toucher
On prélève au hasard une boule dont on note la couleur et **on ne la remet pas dans le sac**. On recommence en prenant une deuxième boule. Un résultat est un couple (première boule tirée, deuxième boule tirée).
On suppose que tous les couples possibles sont équiprobables.
1°) A l'aide d'un arbre dénombrer tous les résultats possibles.
2°) Déterminer la probabilité de l'événement A : « on a une boule bleue au premier tirage » et de l'événement B : « on a une boule bleue au deuxième tirage » et P(A ∩ B)

Exemple de tirage possible :

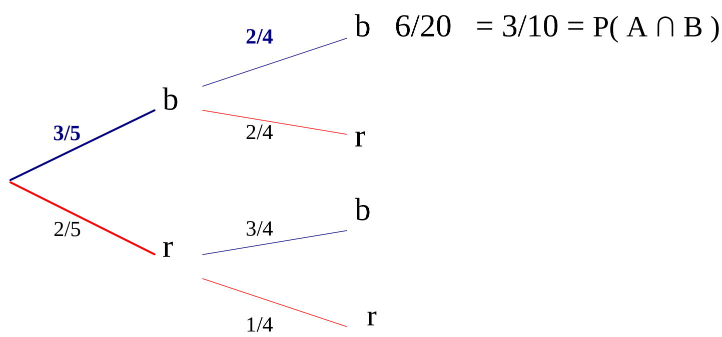




il y a 20 résultats possibles (5 x 4)
P(A) = 3/5
P(B) = (2 + 2 + 2 + 3 + 3)/20 = 3/5 donc **<u>P(A) x P(B) = 9/25</u>**
<u>Calcul de P(A ∩B) :</u>
Il faut avoir une boule bleue au premier tirage et une boule bleue au deuxième tirage.
D'après notre premier arbre cela donne :

<u>P(A ∩ B) = (2 + 2 + 2)/20 = 3/10</u>

Pour le calcul de P(A ∩B) on peut aussi représenter un arbre où
au premier niveau sont écrites **les probabilités de tirer une boule b et de tirer une boule r**,
et au second niveau les probabilités **de tirer une boule b ou r en tenant compte du premier choix** (qui conditionne le second) : **<u>ce sont des probabilités conditionnelles</u>**.



On remarque que la probabilité de tirer une boule b au 1^{er} tirage et une boule b au $2^{ième}$ est égale au produit de la probabilité de tirer une boule b au 1^{er} (c'est – à – dire P(A)) par la probabilité de **<u>tirer une boule b au $2^{ième}$ sachant que l'on a tiré une boule b au 1^{er}</u>** .En effet :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 6/20 = 3/10$$

et on a bien P(A) x P(B) ≠ P (A ∩ B).

<u>Définition</u>

Si P(B) non nul , on appelle probabilité de A sachant B ou probabilité de A si B, notée P_B (A) ou P(A/B), le quotient suivant :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple : Dans notre exemple $P_A(B) = 2/4 = ½$

Définition

Soit P une probabilité sur un univers E et B un événement tel que $P(B) \neq 0$.

L'application $P_B : E \longrightarrow [0;1]$ est appelée probabilité conditionnelle sachant B.

$A \longrightarrow P_B(A)$

Propriétés immédiates

1. $0 \leq P_B(A) \leq 1$

2. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P_B(A) = 0$.

3. $P_B(B) = 1$

4. $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$

5. $P(A \cap B) = P(A) . P_A(B) = P(B) . P_B(A)$

Preuves :

1. $A\cap B$ est une partie de B donc $P(A\cap B) \leq P(B)$. Comme les probabilités sont positives on a donc

$\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \leq 1$ et $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$. D'où le résultat.

2. Immédiat

3. Immédiat

4. $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}$

Or $(A\cap B) \cup (A\cap\overline{B}) = B$ et $(A\cap B) \cap (A\cap\overline{B}) = \emptyset$ d'où le résultat.

5. Probabilités conditionnelles.

Remarques : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

1. A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P(B)$
   A et B sont indépendants ssi $P_B(A) = P(A)$.

2. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Exemples :

1. Une population est composée de 54% d'hommes et 46% de femmes. Une enquête montre que 30% des hommes et 40 % des femmes de cette population ne fument pas.
a. Quelle est la proportion de fumeurs dans cette population ?
b. On prend un individu au hasard .Quelle est la probabilité pour que ce soit 1 homme fumeur ; et quelle est la probabilité que ce soit un homme sachant que c'est un fumeur.

2. Dans un sac on a 4 boules bleues numérotées 1 , 1 , 2 , 3 et 6 boules rouges numérotées 1 , 1 , 1 , 2 , 3 et 4 indiscernables au toucher .On en tire une au hasard. On considère l'événement B : « la boule tirée est bleue » et l'événement R : « la boule tirée est rouge », l'événement Q : « la boule tirée porte le n°4 » et l'événement U : « la boule tirée porte le n°1 ».Calculer les probabilités de ces événements.
Que peut –on dire des événements B et U ? Q et B ?

1a. Parmi les hommes, il y a 70% de fumeurs et parmi les femmes , il y en a 60%.

$\frac{70}{100} \times 54 + \frac{60}{100} \times 46 = 0{,}654 = 65{,}4/100$ c'est – à – dire 65,4%. (Remarque : on peut aussi utiliser un tableau à double entrée)

1b. $P(H \cap F_u) = 0.378$ $P_{Fu}(H) = P(H \cap F_u)/P(F_u) \approx 0.578$

2.$P(B) = 4/10$ $P(R) = 6/10$ $P(Q) = 1/10$ $P(U) = 5/10 = ½ = 2/4 = P_B(U)$ donc U et B sont indépendants

$P_B(Q) = 0$ et $P(Q) = 1/10$ donc B et Q ne sont pas indépendants

<u>REMARQUE :</u> dans cet exercice on constate qu'il ne faut pas confondre événements indépendants et événements disjoints

<u>Variables aléatoires indépendantes</u>

Soit deux variables aléatoires X et Y associées à la même expérience aléatoire

<u>Définition</u>

X prend les valeurs x_i (i entier naturel allant de 0 à n) et Y(j entier naturel allant de 0 à m) prend les valeurs y_i .
On dit que les deux variables aléatoires sont indépendantes pour la probabilité P si pour tout entier i et pour tout entier j, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_i)$ sont indépendants càd
$P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_i)$.

<u>Exemple :</u> L'expérience consiste à lancer deux dés parfaitement équilibrés : X désigne la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus sur la face supérieure et Y est la variable aléatoire égale à leur produit. Calculer $P(X = 2)$ et $P(Y = 3)$ puis $P((X = 2) \cap (Y = 3))$ .Ces deux variables aléatoires sont elles indépendantes

$P((X = 2) \cap (Y = 3)) = 0$ et $P((X = 2)) \times ((Y = 3)) = 1/12$

<u>Expériences répétées indépendantes</u>

<u>Définition et propriété</u>

On dit que des expériences aléatoires répétées sont indépendantes si le résultat de l'une d'entre elles n'a aucune influence sur le déroulement des autres

Lors de la répétition d'expériences aléatoires **<u>indépendantes</u>** , on admettra que la probabilité d'une liste de résultats est égale au **<u>PRODUIT</u>** des probabilités de chacun des résultats .

<u>Exemple :</u> On procède à deux tirages successifs de la même urne.
Les tirages avec remise du premier jeton conduisent à deux expériences indépendantes contrairement à un tirage sans remise puisque le résultat du premier tirage conditionne celui du deuxième tirage.

<u>Exercice</u> : Deux boules rouges et une verte indiscernables au toucher, sont placées dans une urne.
On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne.
1°) Quelle est la probabilité de tirer les deux boules rouges
2°) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

1.4/9
2.2/9+2/9=4/9

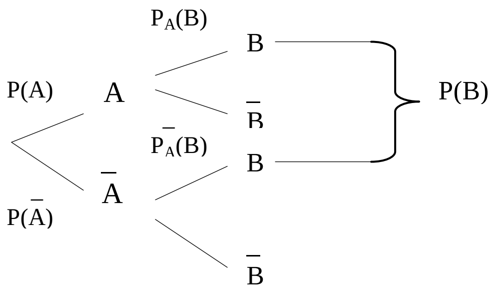
<u>3°) Probabilités totales</u>

<u>Propriété</u>

E est un univers et A est un événement de E tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) . P_A (B) + P(\overline{A}) . P_{\overline{A}} (B)$$

Remarque : On a $E = A \cup \bar{A}$, c'est une partition de E.



Définition

E est un univers . Pour un entier naturel $n \geq 2$ si A_1 ; A_2 ; … et A_n sont n évts tels que

$$\left.\begin{array}{ll} P(A_i) \neq 0 & \text{pour tout } i = 1,2,\dots,n \\ A_i \cap A_j = \varnothing & \text{pour tout } i \neq j \\ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E & \end{array}\right\}$$

les événements A_1 ; A_2 ; … et A_n forment une **partition** de E.

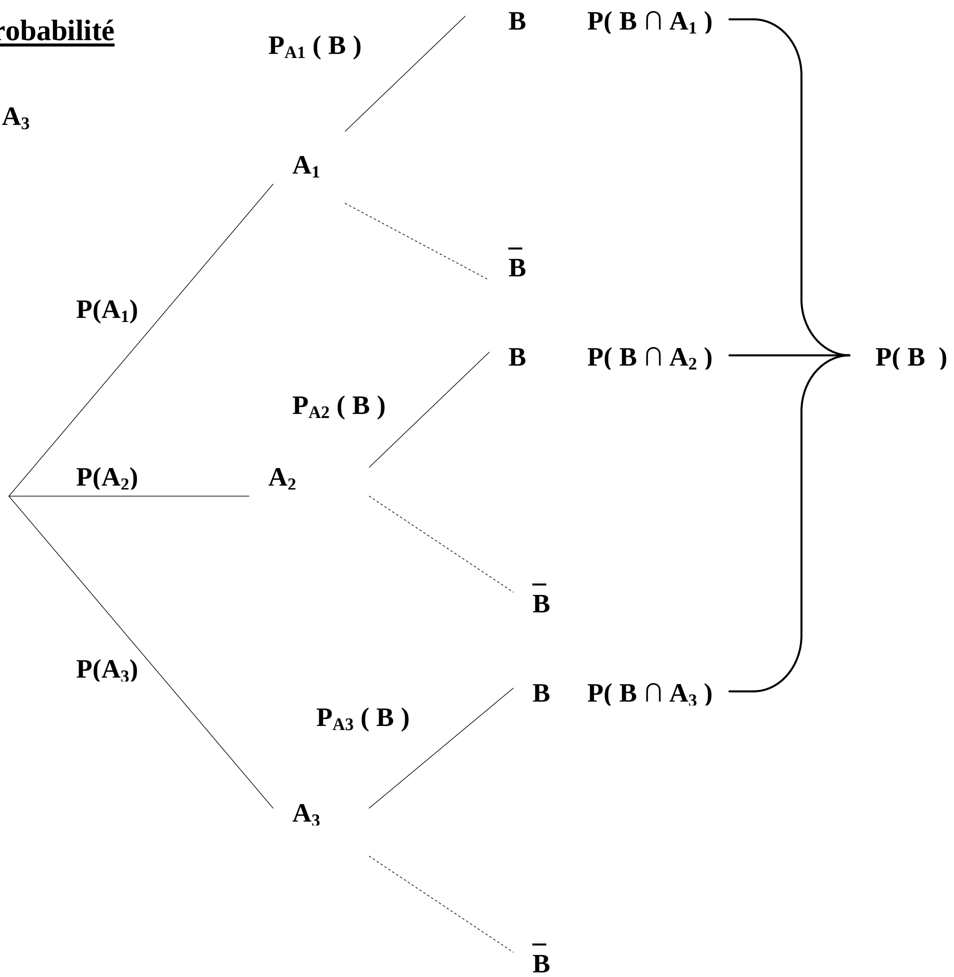
Formule des probabilités totales

Soit A_1 ; A_2 ; … et A_n une partition de E.B un événement quelconque de E.

$$\mathbf{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = P_{A1}(B).P(A_1) + P_{A2}(B).P(A_2) + \dots + P_A(B).P(A_n)}$$

Un arbre de probabilité

$E = \mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \cup \mathbf{A_3}$



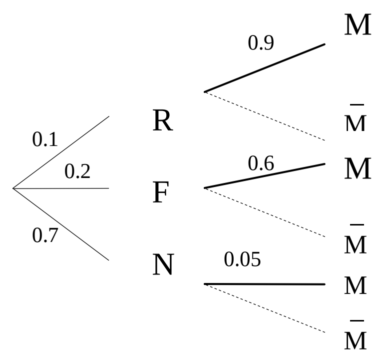
Preuve : $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$ **avec** $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$
Donc $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$ **et pour tout i dans {1; …; n }**
$P(B \cap A_i) = P_{A_i}(B).P(A_i)$ **d'où le résultat.**

Exemples :
1.Un test medical concernant une allergie à un produit X est effectué sur la totalité d'une population. Une étude statistique établit que 70 % de la pop Réagit négativement au test(evt N) ; 20 % réagit faiblement au test (evt F) et 10% réagit fortement au test (evt R) .
La probabilité pour une personne de cette population soit allergique au produit X (evt M) est
0.9 qd le test est fortement positif/0.6 qd le test est faiblement positif/0.05 qd le test est négatif

2.Arbre de probabilités
Pour la fabrication d'un jouet, on utilise (entre autres) une emboutisseuse en plastique , puis un robot peintre.
Les probabilités pour que l'emboutisseuse et le robot peintre tombent en panne sont respectivement $2 10^{-2}$ et $8 10^{-2}$.
Etant donné les cadences, on estime que lorsque l'emboutisseuse est en panne la probabilité pour que le robot soit en panne est 0.25.
1°) Calculer la probabilité pour que le robot et l'emboutisseuse soient en panne.
2°) Calculer la probabilité pour que le robot et l'emboutisseuse fonctionnent.

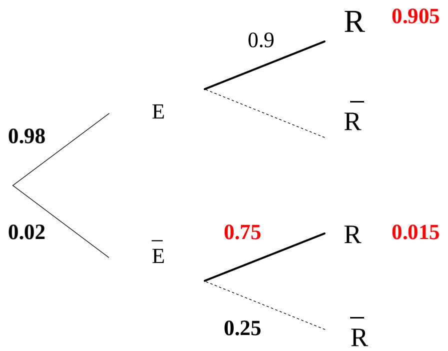
3. Calcul de probabilités conditionnelles.
Un sujet commun de Physique peut être créé par 3 professeurs X, Y et Z, avec les probabilités suivantes compte tenu de l'expérience des années précédentes :
$P(X) = 0.35$ $P(Y) = 0.4$ et $P(Z) = 0.25$
Les étudiants craignent un sujet portant sur la relativité (évt R) et connaissant leurs professeurs pronostiquent :
$P_X(R) = 0.2$ $P_Y(R) = 0.5$ $P_Z(R) = 0.8$
1°) Traduire l'hypothèse $P_X(R) = 0.2$ par une phrase liée aux probabilités conditionnelles. Traduire à l'aide d'un arbre de probabilités les données de l'énoncé.
2°) Calculer la probabilité pour que le sujet posé prote sur la relativité.
3°) Le sujet porte sur la relativité à l'examen ; quelle est alors la probabilité pour que X ait créé ce sujet ?

1.



$P(M) = \mathbf{P_R(M).P(R) + P_F(M).P(F) + P_N(M).P(N) = 0.245}$

2. E : « l'emboutisseuse fonctionne » R : « le robot fonctionne »



1. $\mathbf{P(\overline{R} \cap \overline{E}) = P_{\overline{E}}(\overline{R}) \times P(\overline{E}) = 0.05}$

2. $\mathbf{P_{\overline{E}}(R) = 1 - P_{\overline{E}}(\overline{R}) = 0.75}$

$\mathbf{P(R \cap \overline{E}) = P_{\overline{E}}(R) \times P(\overline{E}) = 0.75 \times 0.02 = 0.015}$

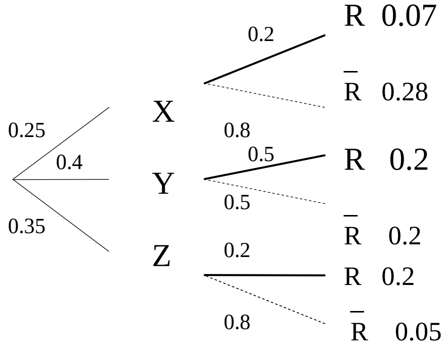
$P(R) = P(R \cap E) + P(R \cap \overline{E})$ et $P(\overline{R}) = 0.08$

$P(R \cap E) = P(R) - P(R \cap \overline{E}) = 1 - P(\overline{R}) - P(R \cap \overline{E})$

$P(R \cap E) = 0.905$

3.

1°)



2°) La formule des probabilités totales donne :

$P(R) = P(R \cap X) + P(R \cap Y) + P(R \cap Z)$

$P(R) = \mathbf{P_X(R).P(X) + P_Y(R).P(Y) + P_Z(R).P(Z)}$

$P(R) = 0.47$

3°) $P_R(X) = P(X \cap R)/P(R) \approx 0.149$