CORRECTION DU DM N°1 TS
16/09/10

Ex1 Résoudre l'équation $x^4-5x^2+4=0$

équivaut à résoudre le système

$$\begin{cases} X = x^2 \\ X^2-5X+4=0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} X = x^2 \\ (X-1)(X-4)=0 \end{cases}$$

puisque 1 est solution évidente de $X^2-5X+4=0$

Soit encore $X=1$ ou $X=4$

c'est-à-dire $x^2=1$ ou $x^2=4$

soit finalement $x=-1$ ou $x=1$ ou $x=-2$ ou $x=2$

$$\boxed{S = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}}$$

Ex2 1°) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$$

D'où par identification on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ b-a = 1 \\ c-b = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$ ce qui donne $f(x) = x+2-\dfrac{1}{x-1}$.

2°) $f'(x) = 1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ d'où $f'>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et

f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$ et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

ATTENTION : Ne surtout pas écrire « f est strictement croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ » car c'est faux. La monotonie d'une fonction n'a de sens que sur un INTERVALLE.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

Petit Plus :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x-1} = 0 \end{cases}$

De même on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} x^2+x-3 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty}$

Asymptote verticale : $x=1$

3°) $\mathcal{C} \cap (Ox)$

Pour déterminer l'abscisse d'un pt d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe (Ox) on résout l'équation :

$$f(x)=0$$

Soit $\dfrac{x^2+x-3}{x-1} = 0$ avec $x \neq 1$.

Soit encore $x^2+x-3=0$ avec $x\neq 1$.

$\Delta = 13$. On obtient donc

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses sont donc les points de coordonnées :

$$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\,;0\right) \text{ et } \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\,;0\right)$$

$\mathcal{C} \cap (Oy)$: On calcule $f(0)$ soit $f(0)=3$

et le pt d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées a pour coordonnées :

$$(0\,;3)$$

4°) Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et (D) on étudie le signe de $h(x) = f(x)-(x+2)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ c'est-à-dire le signe de $h(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

Ce qui donne le tableau suivant :

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	+	−
Position relative de $\mathcal{C}$ et (D)	$\mathcal{C}$ est au-dessus de (D)	$\mathcal{C}$ est en-dessous de (D)

Remarque ! Pour s'aider on peut faire cette petite étude AU BROUILLON ET UNIQUEMENT AU BROUILLON !

$f(x)-(x+2)>0$

⚠ à ne pas écrire sur la copie ! → $\mathcal{C} - \mathcal{D} > 0 \Rightarrow \mathcal{C} > \mathcal{D}$

Traduction : $\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{D}$

Ex 3

1°) a) • $f(0)=0$ $f'(-1) = f'(0) = f'(2) = 0$

• $f'(3) = \dfrac{+6}{+0{,}5} = 12$ (coefficient directeur de la tangente T)

b) $f'<0$ sur les intervalles où f est décroissante strictement donc $S =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;2[$.

2°) f_2 3°) $f'(x) = x^3-x^2-2x$ donc

$f'(-2) = -8-4+4 = -8$. L'équation réduite de la tangente au point B est donc

$y = -8(x+2) + f(-2)$

$f(-2) = \frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 4 = \frac{8}{3}$

d'où $\boxed{y = -8x - \frac{40}{3}}$

4°) Les points où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$ sont les points dont l'abscisse vérifie l'équation :

$\boxed{f'(x) = -2}$ soit

$x^3 - x^2 - 2x = -2$ soit encore

$x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

$x^2(x-1) - 2(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2-2) = 0$ soit $x = 1$ ou $x^2 - 2 = 0$

c'est-à-dire

$x = 1$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

Les pts cherchés sont les pts de coordonnées :

$\left(-\sqrt{2}; -1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ $\left(1; -\frac{13}{12}\right)$ $\left(\sqrt{2}; -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Ex4

1°) (U_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 5000$.

$U_n = 5000.2^n$

Remarque : si on pose $U_1 = 5000$ alors $U_n = 5000\,2^{n-1}$

2°) $U_6 = 5000 \times 2 = 320.000$ €

3°) 9 semaines de suite car $U_8 = 1.280.000$

soit $U_8 > 10^6$ €.

Ex5

$U_3 = 4 = U_0 + 3r$ et $U_8 = 19 = U_0 + 8r$

On a donc le système suivant

$\begin{cases} U_0 + 3r = 4 \\ U_0 + 8r = 19 \end{cases}$ $\begin{cases} U_0 + 3r = 4 \\ 5r = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} U_0 + 3r = 4 \\ r = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} U_0 = -5 \\ r = 3 \end{cases}$

$U_{26} = U_0 + 26r = 73$.