CORRIGES DES EXOS P 155 .156 SUR LES COMPLEXES

59 **1.** Notons $A(-1+i)$ et $B(3+i)$,
alors $(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}) = 0[\pi]$.
Donc M appartient à la droite (AB) privée de A et de B.

2. $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z+\frac{1}{2}}{z+\frac{i}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Notons $C\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $D\left(-\dfrac{i}{2}\right)$.

Alors : $(\overrightarrow{DM}\,;\overrightarrow{CM}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

M appartient au cercle de diamètre $[DC]$, privé de C et de D.

3. $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{\overline{z+1+i}}{-z+4+2i}\right) = \pi\ [2\pi]$.

Comme $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg}(z)\ [2\pi]$, donc $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z+1+i}{-z+4+2i}\right) = -\pi\ [2\pi]$.

Notons $E(-1-i)$ et $F(4+2i)$, alors $(\overrightarrow{MF}\,;\overrightarrow{EM}) = -\pi\ [2\pi]$.

$$(\overrightarrow{FM}\,;\overrightarrow{EM}) + \pi = -\pi\ [2\pi]$$
$$(\overrightarrow{FM}\,;\overrightarrow{EM}) = 0\ [2\pi].$$

Donc M appartient à la droite (EF) privée du segment $[EF]$.

4. Soit $K(3+i)$ et $L(-2-3i)$, $(\overrightarrow{LM}\,;\overrightarrow{KM}) = 0\ [2\pi]$.
Donc M appartient à la droite (LK) privée de $[LK]$.

5. Soit $G(-1)$ et $H(i)$, alors $(\overrightarrow{HM}\,;\overrightarrow{GM}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

M appartient au demi-cercle de diamètre $[HG]$ privé de H et de G et ne contenant pas O.

61 **1.** $z'=\dfrac{(1-i)(x+iy-i)}{(x+iy-1)}=\dfrac{x+iy-i-ix+y-1}{(x-1)+iy}$

$$=\frac{[x+y-1+i(-x+y-1)][(x-1)-iy]}{[(x-1)+iy][(x-1)-iy]}$$

avec $(x\,;\,y)\neq(1\,;0)$.

$$z'=\frac{(x+y-1)(x-1)+y(-x+y-1)+i((x-1)(-x+y-1)-y(x+y-1))}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}(z')=\frac{x^2-x+xy-y-x+1-xy+y^2-y}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-2x-2y+1}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Im}(z')=\frac{-x^2+xy-x+x-y+1-xy-y^2+y}{(x-1)^2+y^2}=\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$$

avec $(x\,;\,y)\neq(1\,;0)$.

2. $\mathrm{Re}(z')=0 \iff x^2+y^2-2x-2y+1=0$ avec $(x\,;\,y)\neq(1\,;0)$
$\iff (x-1)^2+(y-1)^2=1$.
M appartient au cercle de centre $(1+i)$ et de rayon 1, prive de A.

3. $\mathrm{Im}(z')=0 \iff x^2+y^2=1$ avec $(x\,;\,y)\neq(1\,;0)$.
M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, privé de A.

62 **1.** Pour construire C on remarque que $\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|=1$, donc :
$C\in\mathscr{C}(O\,;1)$.

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)>0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Γ est le cercle de centre A et de rayon 2.

3. **Δ est la médiatrice de $[BC]$.**

63 **1.** $z'=(x+iy+1-i)(x+iy-3i)$
$=x^2+ixy-3ix+ixy-y^2+3y+x+iy-3i-ix+y-3$.

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(z')=x^2-y^2+4y+x-3\\ \mathrm{Im}(z')=2xy-4x-x-3\end{cases}$$

2. $z'=\dfrac{(x+iy-2-i)}{(x+iy-1+3i)}=\dfrac{[(x-2)+i(y-1)][(x-1)-i(y+3)]}{[(x-1)+i(y+3)][(x-1)-i(y+3)]}$

$$\mathrm{Re}(z')=\frac{(x-2)(x-1)+(y-1)(y+3)}{(x-1)^2+(y+3)^2}$$

$\mathrm{Im}(z')=\dfrac{-(x-2)(y+3)+(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y+3)^2}$ avec $(x\,;\,y)\neq(1\,;-3)$.

3. $z'=\dfrac{(1+i)(x+iy)-2-i}{x+iy-1+3i}=\dfrac{[(x-y-2)+i(y+x-1)][(x-1)-i(y+3)]}{[(x-1)+i(y+3)][(x-1)-i(y+3)]}$

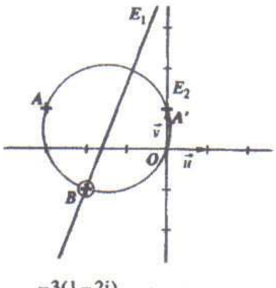
$$\begin{cases}\mathrm{Re}(z')=\dfrac{(x-y-2)(x-1)+(y+x-1)(y+3)}{(x-1)^2+(y+3)^2}=\dfrac{x^2+y^2+3y-1}{(x-1)^2+(y-3)^2}\\[2ex] \mathrm{Im}(z')=\dfrac{-(x-y-2)(y+3)+(x-1)(y+x-1)}{(x-1)^2+(y+3)^2}=\dfrac{x^2+y^2-5x+4y+7}{(x-1)^2+(y-3)^2}\end{cases}$$

avec $(x\,;\,y)\neq(1\,;3)$.

---

64 **1.** $f(-3+i)=\dfrac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i}=\dfrac{(-2-i)(-2+i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=i$.

2. $f(z)=2i \iff \dfrac{z+1-2i}{z+2+i}=2i$; $(1-2i)z=6i-3$.



$z=\dfrac{-3(1-2i)}{(1-2i)}=-3$. $S=\{-3\}$.

3. **On pose** $z=x+iy$ **alors :**

$$f(z)=\frac{[(x+1)+i(y-2)][(x+2)-i(y+1)]}{[(x+2)+i(y+1)][(x+2)-i(y+1)]}.$$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,(f(z))=\dfrac{x^2+3x+y^2-y}{(x+2)^2+(y+1)^2}\\[2ex] \mathrm{Im}\,(f(z))=\dfrac{-3x+y-5}{(x+2)^2+(y+1)^2}\end{cases} \quad \text{avec } (x\,;\,y)\neq(-2\,;-1).$$

4. • $f(z)\in\mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\,(f(z))=0$.
$f(z)\in\mathbb{R} \iff -3x+y-5=0$.
Donc E_1 est la droite d'équation $y=3x+5$ privée du point $B(-2-i)$

• $f(z)\in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\,(f(z))=0 \iff x^2+3x+y^2-y=0$.

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}.$$

E_2 est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ privé de B.

65 **1. a.** $Z = \dfrac{x+iy-1+2i}{x+iy-i} = \dfrac{[(x-1)+i(y+2)][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)][x-i(y-1)]}$.

$$\begin{cases} X = \dfrac{x^2-x+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2} \\ Y = \dfrac{2x+x+y-1}{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{3x+y-1}{x^2+(y-1)^2} \end{cases} \quad \text{avec } (x\,;\,y) \neq (0\,;\,1) .$$

b. $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0$; avec $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,1)$.

$\mathscr{E}$ est la droite d'équation $y = -3x + 1$ privée de B .

c. $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow X = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y - 2 = 0$, avec $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,1)$

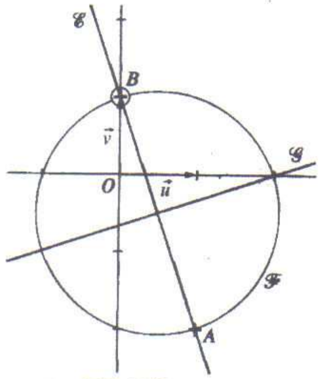
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

$\mathscr{F}$ est le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ privé de B .

d. $|Z| = 1$, donc $\left|\dfrac{z-1+2i}{z-i}\right| = 1$. $AM = BM$.

$\mathscr{G}$ est la médiatrice de $[AB]$.

e.



2. arg $Z = (\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})$

$Z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(Z) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}) = 0\ [\pi]$

M appartient à la droite (AB) privée de A et de B .

$Z = 0$ pour $M = A$, donc :

$\mathscr{E}$ est la droite (AB) privée de B .

$Z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B .

$Z = 0$ pour $M = A$.

$\mathscr{F}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B .

66 **1. a.** $\Omega(\omega)$ est invariant si, et seulement si : $\Omega = f(\Omega)$; d'où :

$\omega = \dfrac{2\omega}{\omega - 2i}$

$\omega^2 - 2i\omega - 2\omega = 0$ ou $\omega = 0$ et $\omega = 2i + 2$.

f admet deux points invariants :

$\omega(\omega - (2i+2)) = 0$ ou $O(0)$ et $\Omega(2+2i)$.

b. *Image de B par f*

$$z' = \frac{2\times 2}{2-2i} = \frac{2}{1-i} = 1 + i .$$

L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $\dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$.

Donc $f(B) = I$.

Image de I par f

$$z' = \frac{2(1+i)}{1+i-2i} = \frac{2(1+i)}{1-i} = 2i .$$

Donc $f(I) = A$.

2. $\begin{cases} |z'| = \left|\dfrac{2z}{z-2i}\right| \\ \arg(z') = \arg\left(\dfrac{2z}{z-2i}\right)\ [2\pi] \end{cases}$ $\quad \begin{cases} OM' = \dfrac{2OM}{AM} \\ (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{OM})\ [2\pi] \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\,\dfrac{MO}{MA} \end{cases}$

3. Soit $M \in \Delta$, donc $OM = OA$, d'où $OM' = 2$. Par suite : $M' \in \mathscr{C}(0\,;\,2)$.

4. Soit $M \in \Gamma - \{A\,;\,O\}$, donc $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Par suite $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$\mathscr{D}$ est la droite perpendiculaire à $(O\vec{u})$ passant par O privée de O .

Pour $M = O$, on a $f(0) = 0$.

$\mathscr{D}$ est la perpendiculaire à $(O\vec{u})$ passant par O c'est-à-dire l'axe $(O\vec{v})$.