CORRIGE DU CONTROLE N°1. BTS1.Le 03/10/08.

EXERCICE 1

Première partie

1°) Le discriminant du trinôme G est $\Delta = 1$. Il a deux solutions 1 et 3/2.On en déduit le signe de G(x) sur R :

x	$-\infty$		1		3/2		$+\infty$
g(x)		+	0	-	0	+	

d'où G (x) > 0 si $x \in\ ]-\infty\ ; 1\ [\ \mathrm{U}\ ]\ 3/2\ ; +\infty[$. **S=]-∞ ; 1 [U] 3/2 ; +∞[.**

2°) a) $P(3) = (3)^3 - (3)^2 - 5(3) - 3 = 27 - 9 - 15 - 3 = 0$.

P(3)=0 donc il existe un polynôme Q de degré 2 tel que

$P(x) = (x - 3)Q(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.

Soit $P(x) = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$ .Par identification on obtient :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -1 \\ c - 3b = -5 \\ -3c = -3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$ ce qui donne : $P(x) = (x - 3)(x^2 + 2x + 1) = (x - 3)(x + 1)^2$

b) On en déduit que $P(x)=0$ équivaut à $x - 3 = 0$ ou $(x + 1)^2 = 0$ donc

L'ensemble des solutions de l'équation $P(x)=0$ est

$\boxed{S = \{-1\ ;\ 3\}}$

Deuxième partie

1°) $\ln(x - 1)$ est défini si $x - 1 > 0$ c'est – à – dire si $x > 1$ soit x dans E.

2°) a) $\ln(x - 1) = \ln 3$ avec x dans E équivaut à avec $x - 1 = 3$; S = { 4}

b) $\ln(x - 1) = 3$ avec x dans E équivaut à $\ln(x - 1) = \ln e^3$ avec x dans E soit à avec $x - 1 = e^3$, S = $\{1 + e^3\}$

3°) a) $\ln(x - 1)$ est défini si $x - 1 > 0$ c'est – à – dire si $x > 1$

$\ln(2x - 1)$ est défini si $2x - 1 > 0$ c'est – à – dire si $x > ½$

$\ln(2x - 2)$ est défini si $2x - 2 > 0$ c'est – à – dire si $x > 1$

donc les trois expressions sont définies pour x dans E.

b) $\ln(x - 1) + \ln(2x - 1) = \ln(2x - 2)$ avec x dans E équivaut à

$\ln[(x - 1)(2x - 1)] = \ln(2x - 2)$ avec x dans E

soit encore $2x^2 - 3x + 1 = 2x - 2$ avec x dans E c'est – à – dire $2x^2 - 5x + 3 = 0$. D'après la première partie 1 et 3/2 sont les deux solutions, cependant ici x dans E et 1 n'appartient pas à E donc S={3/2}

EXERCICE 2

A) 1°) $\ln x \geq 0$ équivaut à $x \geq 1$. S =[1 ; + ∞[

2°)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	

B) 1°) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x / x = 0$

la droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de +∞.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1/x = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + \ln x) = -\infty$

2°) a) $f'(x) = -(\ln x)/(x)^2$

Comme $x^2 > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$.

b)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	1

3°) a) $S = \{1/e\}$
b) $S =]\,1/e\,;+\infty\,[$; on en déduit que C est au – dessus de D sur $]\,1/e\,;+\infty\,[$ et en – dessous sur $]0\,;1/e[$.