Exercices sur les logarithmes

1. <u>Ex 1</u>

$A = \ln 2 + \ln 2^3 = \ln 2 + 3\ln 2 = 4\ln 2$

$B = \ln\sqrt{2} - \ln\frac{1}{27} = \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3^3 = \frac{1}{2}\ln 2 + 3\ln 3$

$C = \ln 9\sqrt{3} + \ln\frac{1}{27} = \ln 9 + \ln\sqrt{3} - \ln 3^3$

$C = \ln 3^2 + \frac{1}{2}\ln 3 - 3\ln 3 = 2\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 - 3\ln 3$

$C = -\frac{1}{2}\ln 3$

<u>Ex 2</u>

$\ln 36 = \ln 4\times 9 = \ln 4 + \ln 9 = 2\ln 2 + 2\ln 3$

$\ln\frac{8}{9} = \ln 8 - \ln 9 = \ln 2^3 - \ln 3^2 = 3\ln 2 - 2\ln 3$

$\ln\sqrt{18} = \frac{1}{2}\ln(2\times 9) = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \ln 9\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$

$\ln 0{,}25 = \ln\frac{1}{4} = -\ln 2^2 = -2\ln 2$

$\ln 144 = \ln(4\times 3)^2 = 2\left(\ln 4 + \ln 3\right) = 2\left(2\ln 2 + \ln 3\right)$

$\ln 144 = 4\ln 2 + 2\ln 3$

$\ln 0{,}75 = \ln\frac{3}{4} = \ln 3 - 2\ln 2$

<u>Ex 4</u>

$\ln 75 = \ln 3\times 25 = \ln 3 + 2\ln 5.$

$\ln\sqrt{15} = \frac{1}{2}\left(\ln 3 + \ln 5\right)$

$\ln\frac{3}{25} = \ln 3 - 2\ln 5$

$\ln 3\sqrt{3} = \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 3$

<u>Ex 3</u>

$\ln 100 = 2\left(\ln 2 + \ln 5\right)$

$\ln\sqrt{50} = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + 2\ln 5\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 5$

$\ln 20 = \ln 4 + \ln 5 = 2\ln 2 + \ln 5$

$\ln 0{,}01 = -\ln 100 = -2\left(\ln 2 + \ln 5\right)$

$\ln 1{,}25 = \ln\frac{5}{4} = \ln 5 - 2\ln 2.$

<u>Ex 5</u>

$\ln e^3 = 3\ln e = 3$

$\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$

$\ln e\sqrt{e} = \frac{3}{2}$

$\ln\frac{\sqrt{e}}{e} = -\frac{1}{2}$

$\ln\frac{1}{e^2} = -2$

$0{,}5\ln\sqrt{e} = \frac{1}{4}$

<u>Ex6</u> ; a) $\ln(x-3)$ existe si $x-3>0$ càd $x>3$ soit $x\in]3;+\infty[$ donc

$\mathcal{D}f =]3;+\infty[$

b) $\mathcal{D}f =]-\infty;5[$

c) $\mathcal{D}f =]\frac{3}{2};+\infty[$

d) $\mathcal{D}f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

<u>Ex 7</u>

a) $\ln x = \ln 2$ équivaut à $\begin{cases} x\in]0,+\infty[\\ \ln x = \ln 2 \end{cases}$

càd $\begin{cases} x\in]0;+\infty[\\ x = 2 \end{cases}$ $S=\{2\}$.

b) $\ln x - 1 = 0$ équivaut à $\begin{cases} x\in]0;+\infty[\\ \ln x - 1 = 0 \end{cases}$ soit à $\begin{cases} x\in]0;+\infty[\\ \ln x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x\in]0;+\infty[\\ \ln x = \ln e \end{cases}$ $\begin{cases} x\in]0;+\infty[\\ x = e \end{cases}$ $S=\{e\}$

c) $\ln x = 4$ équivaut à $\begin{cases} x\in]0;+\infty[\\ \ln x = \ln e^4 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in]0;+\infty[\\ x = e^4 \end{cases}$

passage indispensable

$S=\{e^4\}$

d) $\ln x^2 = -2$ équivaut à $\begin{cases} x\neq 0 \text{ (car } x^2\geq 0 \text{ déjà !)} \\ \ln x^2 = \ln e^{-2} \end{cases}$

idem ; il faut le logarithme népérien des 2 côtés

$\begin{cases} x\neq 0 \\ x^2 = e^{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0 \\ x^2 = \frac{1}{e^2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2 \end{cases}$

$S = \left\{-\frac{1}{e} ; \frac{1}{e}\right\}$

e) $\ln(x^2+x+1) = 0$ équivaut à $\ln(x^2+x+1) = \ln 1$ (car $x^2+x+1>0$ pour tout réel x donc il n'y a pas de "précautions" à prendre) soit $x^2+x=0$ $S=\{-1;0\}$