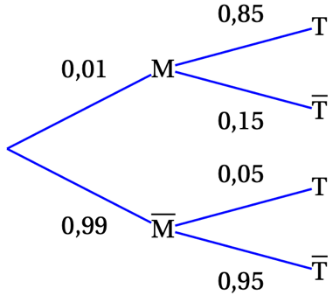
Bac blanc 2022 corrigé

Exercice 1

1.

1.



1

2. **a.** On suit la première branche : la probabilité est égale à 0.5

$P(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}01 \times 0{,}85 = 0{,}0085.$

0.5 **b.** D'après la formule des probabilités totales

On a $p(T) = p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) = 0{,}0085 + 0{,}0495 = 0{,}058.$

3. Il faut calculer $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}0085}{0{,}058} \approx 0{,}1466.$ 0.5

4. a-On répète 20 épreuves indépendantes (« La taille de ce groupe permet de considérer les épreuves comme indépendantes ») et identiques qui ont deux issues possibles , un succès « le test est positif »,ou un échec « le test est négatif » . On répète donc 20 fois, une épreuve de Bernouilli de paramètre p=0,058. 0.5

Donc X suit une loi binomiale B(20 ;0,058) .

b- On en déduit que E(X) = 20 x 0,058 = 1.16 . On peut donc dire que sur 20 lapins il y a en moyenne un lapin testé positif. 0.25

c- La probabilité que 5 lapins parmi les vingt testés aient un test positif est :

$P(X = 5) = \binom{20}{5}(0{,}058)^5(1 - 0{,}058)^{15} = 0{,}0042$ 0.5

d- $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0}(0{,}058)^0(1 - 0{,}058)^{20}$ 0.75 = 0.25 + 0.5
justification

Grâce à la calculatrice on obtient $P(X \geq 1) = 0.6973$

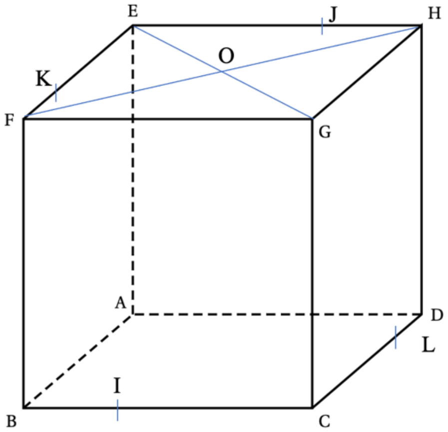
5. a- D'après la calculatrice on $P(X \leq 2) = 0{,}89$ et $P(X \leq 3) = 0{,}97$ donc k = 3 0.25

b- Il y a plus de 90% de chances d'avoir au plus trois lapins testés positif. 0.25

Exercice 2

5 x 1

A(0 ;0 ;0) B(1 ;0 ;0) C(1 ;1 ; 0) D(0 ;1 ;0) E(0 ;0 ;1) F(1 ; 0 ; 1) G(1 ;1 ;1) H(0 ;1 ;1)
I(1 ; $\frac{1}{3}$; 0) J(0 ; $\frac{2}{3}$; 1) K($\frac{3}{4}$; 0 ; 1) L ($\frac{1}{4}$; 1 ; 0) O($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1)



1. Les points suivants ne sont pas coplanaires :

a. A, B, I et L b. O, F, B et D c. J, H, D et L d. O, E, G et K

2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont :

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Une représentation paramétrique de la droite (OJ) est :

a. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, t \\ y = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} t \\ z = t \end{cases}$, t ∈ R b. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} t \\ z = 1 \end{cases}$ t ∈ R c. $\begin{cases} x = -t \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} t \\ z = t \end{cases}$, t ∈ R d. $\begin{cases} x = \frac{1}{4} t. \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} t \\ z = 1 \end{cases}$, t ∈ R

4. On donne une représentation paramétrique de la droite (IJ) :

$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = 3t \end{cases}$, t ∈ R

Et une représentation paramétrique de la droite (KL).

$\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$, t' ∈ R

On admet que ces deux droites sont sécantes. Les coordonnées du point d'intersection N des droites (IJ) et (KL) sont :

a. $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{3})$ b. $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ c. $(\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{2})$ d. $(\frac{1}{3} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3})$

5. Les vecteurs suivants forment une base de l'espace :

a. $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{DL}$ b. $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{OE}$ c. $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{GC}$ d. $\overrightarrow{FK}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$

Exercice 3

1. $u_1 = (u_0 + 80) \times 0,95 = 0,95 \times 3080 = 2926.$ 0.5
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95 = \boxed{0,95u_n + 76}$. 0.5

3. **a.** Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_n \geqslant 1520$.
   - Initialisation : $u_0 = 3000 \geqslant 1520$ donc la propriété est vraie au rang 0. 0.25
   - On suppose que $u_n \geqslant 1520$ pour un entier n quelconque.
     Alors : $0,95u_n \geqslant 0,95 \times 1520$ d'où $0,95u_n + 76 \geqslant 0,95 \times 1520 + 76 = 1520$ donc la propriété est héréditaire. 0.25

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n. 0.25

   b. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76 = -0,05(u_n - 1520) \leqslant 0$ car on a montré que $u_n \geqslant 1520$.
   La suite (u_n) est bien décroissante. 0.5

   c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1520 donc elle est convergente. 0.25

4. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.

   a. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1520 = 0,95u_n - 1444 = 0,95(u_n - 1520)$ $= \boxed{0,95v_n}$. 0.5
   La suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$. 0.25

   b. Par conséquent, puisque (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 q^n = 1480 \times 0,95^n$ donc $\boxed{u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520}$. 0.25

   c. $-1 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,05^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520}$. 0.5

5. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```python
def seuil():
    n=0
    u=3000
    while u>=2000:
        n=n+1
        u=1480*0.95**n+1520
    print("le rang est", n)
```

0.125 x 6 = 0.75

7. On a vu que la limite de la suite est 1 520 donc il y a une valeur de la suite pour laquelle $u_n < 2000$
   On trouve $\boxed{n = 22}$. 0.25

Exercice A

Partie I : Observation graphique 2

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique :

1. f(0) = 2 f(2)=0 $f'(0) = 1$ $f'(1) = 0$ 0.125 x 4

2. L'axe des abscisses semble représenter une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ pour la courbe C_f

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 0.25 x 6

4. **a)** Il y a deux solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle R
   b) Si xo est la solution positive de cette équation on $1<xo<2$.

5. f est croissante sur $]-\infty; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$

6. f est convexe sur $]-\infty; 0]$.

Partie II : Etude de la fonction 2

1. **Limite en -∞**

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{x} = 0$ par croissance comparée

Donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 0.5

2. a) f est la somme de fonction dérivable sur R , elle est donc dérivable sur R et on a :
$f'(x) = 2e^{x} - (e^{x} + xe^{x}) = e^{x} - xe^{x} = (1-x)e^{x}$ 0.25
Comme $e^{x} > 0$ pour tout réel x donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - x)$ sur R.
On a donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

0.25

b) On a donc le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$-\infty$

0.5

3. a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 2]$ à valeurs dans l'intervalle $[0; e]$ qui contient 1, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation f(x) = 1 admet une unique solution α dans $[1; 2]$. 0.25

b) Comme d'après la calculatrice f (1,84) ≈ 1.0074 et que f (1,85) = 0.9539 alors

on en déduit que $1.84 < \alpha < 1.85$ 0.25

Partie III: Etude de la convexité 1.25

On veut étudier la position relative de la courbe C_f et de la tangente (AC).

1. (AC) : y = f '(0) x + f(0)
   (AC) : y = x + 2 0.25

2. a) $f''(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$ 0.25

   b) Comme $e^x > 0$ pour tout réel x donc $f''(x)$ est du signe de $-x$ sur R .

   $f''(x) \leq 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$ donc f est concave sur $[0; +\infty[$ 0.25

   $f''(x) \geq 0$ pour tout x de $]-\infty; 0]$ donc f est convexe sur $]-\infty; 0]$

3. $f''(x) = 0$ si $x = 0$, le point A est un point d'inflexion de Cf. 0.25
4. A étant le point d'inflexion de la courbe, C_f est au-dessus de la tangente (AC) sur $]-\infty; 0]$ puisque f est convexe sur $]-\infty; 0]$ et Cf est en-dessous de la tangente (AC) sur $[0; +\infty[$ puisque f est concave sur $[0; +\infty[$. 0.25

Exercice B

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire 2.75

Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = ln(x) + x$

1. **Limite en 0**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \end{array}\right\} \text{Donc par somme } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty$$

0.5

Limite en +∞

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{Donc par somme } \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

0.5

2. a) g est la somme de deux fonctions dérivables sur]0 ; +∞[, elle est donc dérivable sur]0 ; +∞[.

$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$ **comme $x \in$]0 ; +∞[alors g'>0 sur]0 ; +∞[.**

0.25 **0.25**

b)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.5

3. La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans R qui contient 0, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$. 0.25

Comme d'après la calculatrice $g\,(0{,}56) \approx -0.019$ et que $g\,(0{,}57) \approx 0.008$ alors on en déduit que $0.56 < \alpha < 0.57$ 0.25

4.On a donc le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g (x)	-	0	+

0.25

Partie II: Etude d'une fonction *f* 1.5

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) - x + \frac{x^2}{2}$

1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout x de $]0\,;+\infty[$ on a :

$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + x = \ln(x) + 1 - 1 + x = \ln(x) + x = g(x)$. 0.5

2. Déterminer la limite de f en 0 .

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} x + \frac{x^2}{2} = 0 \end{array}\right\}$$

Donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$ 0.5

3. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que f(α) = -0,73.

Comme $f'(x) = g(x)$ alors $f'(x)$ est du signe de g(x) ; d'après le 4 de la partie 1 on a le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	-0,73	↗	$+\infty$

0.5

Partie III: Etude de la convexité 1

C_f est la courbe représentative de f dans un repère. On veut étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

0. 5

Soit $y = 1(x - 1) - \frac{1}{2}$

Soit finalement :

$$y = x - \frac{3}{2}$$

Il s'agit de l'équation de D.

2. $f''(x) = g'(x) = \frac{1}{x} + 1$ donc $f'' > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et f est convexe sur $]0 ; +\infty[$. 0.25

3. La droite D est la tangente à Cf au point d'abscisse 1. De plus f est convexe sur $]0 ; +\infty[$ donc la courbe Cf est au-dessus de ses tangentes sur $]0 ; +\infty[$. On en déduit que Cf est au-dessus de D sur $]0 ; +\infty[$.

0.25